

Métodos Matemáticos II

Grao en Física.

3.- Espazos Vectoriais.

3.1.- Espazos Vectoriais

3.1.0.-Presentación.

Consideramos o corpo $K = \mathbb{R}$.

(De forma totalmente análoga, podemos supoñer $K = \mathbb{Q}$, ou $K = \mathbb{C}$).

É claro que se consideramos en \mathbb{R} , \mathbb{Q} ou \mathbb{C} as operacións de suma e produto habituais, entón $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ e $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ son corpos (Definición 2.2.14.) pois, por exemplo en $(\mathbb{R}, +, \cdot)$:

- 1) $(\mathbb{R}, +)$ é un grupo conmutativo.
- 2) \cdot é unha operación asociativa e conmutativa.
- 3) \cdot é distributiva respecto á $+$ por ambos lados.
- 4) \cdot ten neutro ($1 \cdot a = a$, $\forall a \in \mathbb{R}$)
- 5) Todos os elementos de \mathbb{R} , excepto o 0 (que é o neutro da suma) ten simétrico para o produto ($\forall a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0 \Rightarrow 1/a \in \mathbb{R}$, $a \cdot 1/a = 1$).

En $V = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ consideramos a operación interna

$$+ : V \times V \rightarrow V, \text{ dada por: } (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

e a operación externa de \mathbb{R} sobre V :

$$\circ : \mathbb{R} \times V \rightarrow V, \text{ dada por: } a \circ (x, y) = (a \cdot x, a \cdot y).$$

É evidente que

$(\mathbb{R}^2, +)$ é un grupo conmutativo:

A operación $+$ é interna.

A operación $+$ é asociativa.

Existe neutro $0 = (0, 0)$.

Cada elemento $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ten simétrico $-v = (-x, -y)$.

A operación $+$ é conmutativa.

$(\mathbb{R}, +, \bullet)$ é un corpo. Os seus elementos chámanse escalares.

\circ representa unha lei de composición externa que cumpre as seguintes propiedades:

V.1. Distributiva respecto á suma de vectores:

$$\alpha \circ (v_1 + v_2) = \alpha \circ v_1 + \alpha \circ v_2, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall v_1 = (x_1, y_1), v_2 = (x_2, y_2) \in \mathbf{V}.$$

V.2. Distributiva respecto á suma de escalares:

$$(\alpha + \beta) \circ v = \alpha \circ v + \beta \circ v, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \forall v = (x, y) \in \mathbf{V}.$$

V.3. "Asociativa"

$$(\alpha \bullet \beta) \circ v = \alpha \circ (\beta \circ v), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \forall v = (x, y) \in \mathbf{V}.$$

V.4. "Neutro"

$$1_{\mathbb{R}} \circ v = v, \quad \forall v = (x, y) \in \mathbf{V}, \quad \text{onde } 1_{\mathbb{R}} \text{ é o neutro de } (\mathbb{R}, \bullet).$$

De forma análoga podemos considerar

En $\mathbf{V} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$ a operación interna

$$+: \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}, \quad \text{dada por:} \quad (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

E a operación externa de \mathbb{R} sobre \mathbf{V} :

$$\circ: \mathbb{R} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}, \quad \text{dada por:} \quad a \circ (x, y, z) = (a \bullet x, a \bullet y, a \bullet z).$$

En xeral podemos considerar operacións análogas para $\mathbf{V} = \mathbb{K}^n$ e o corpo $(\mathbb{K}, +, \bullet)$ con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

3.1.1.- Definición.

Un espazo vectorial é unha terna $((\mathbf{V}, +), (\mathbb{K}, +, \bullet), \circ)$ tal que

$(\mathbf{V}, +)$ é un grupo conmutativo. Os seus elementos chámanse vectores.

$(\mathbb{K}, +, \bullet)$ é un corpo. Os seus elementos chámanse escalares.

\circ representa unha lei de composición externa que cumpre as seguintes propiedades:

- V.1. Distributiva respecto á suma de vectores:

$$\alpha \circ (v_1 + v_2) = \alpha \circ v_1 + \alpha \circ v_2, \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}, \quad \forall v_1, v_2 \in \mathbf{V}.$$

- V.2. Distributiva respecto á suma de escalares:

$$(\alpha + \beta) \circ v = \alpha \circ v + \beta \circ v, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \quad \forall v \in \mathbf{V}.$$

- V.3. "Asociativa":

$$(\alpha \bullet \beta) \circ v = \alpha \circ (\beta \circ v), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \quad \forall v \in \mathbf{V}.$$

- V.4. "Neutro":

$1_K \circ v = v, \forall v \in V$, onde 1 é o neutro de (K, \bullet) .

3.1.2.- Nota.

Se $((V, +), (K, +, \bullet), \circ)$ é un espazo vectorial, é usual abreviar con algunha das seguintes expresións:

(V, K, \circ) é un espazo vectorial.

V é un espazo vectorial sobre K .

V é un K -espazo vectorial.

V é un espazo vectorial (cando xa se da por suposto cal é o corpo)

Os elementos de V chamarémolos vectores e os de K escalares.

O elemento neutro para a operación $+$ denótase por 0 e chámase vector cero.

Dado un vector $v \in V$ o seu simétrico para $+$ chámase oposto de v e denótase por $-v$:

Adoptaranse as seguintes notacións:

1_K o neutro do grupo $(K, *, \bullet)$.

α^{-1} o simétrico de α en $(K, *, \bullet)$.

0_K o neutro do grupo $(K, +)$.

$-\alpha$ o simétrico de α en $(K, +)$.

0_V o neutro do grupo $(V, +)$.

$-v$ o simétrico de v en $(V, +)$.

3.1.3.- Exemplos.

$(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, \circ)$ sendo $\alpha \circ (x, y) = (\alpha x + \alpha y)$. Analogamente

$(\mathbb{R}^2, \mathbb{Q}, \circ)$

$(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, \circ)$, sendo $n \in \mathbb{N}$.

$(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}, \circ)$, sendo $n \in \mathbb{N}$.

$(\mathbb{C}^n, \mathbb{R}, \circ)$, sendo $n \in \mathbb{N}$.

$(\mathbb{C}^n, \mathbb{Q}, \circ)$, sendo $n \in \mathbb{N}$.

$V = M_{m \times n}(\mathbb{R})$ é un \mathbb{R} -espazo vectorial.

3.1.4.- Exemplo.

Se consideramos o conxunto das matrices de orde $n \times m$ con coeficientes en \mathbb{R} , coa suma ordinaria como operación interna e a multiplicación por un escalar como operación externa, é un \mathbb{R} -espazo vectorial.

3.1.5.- Nota.

$(\mathbb{Q}^2, \mathbb{R}, \circ)$ sendo $\alpha \circ (x, y) = (\alpha x, \alpha y)$, non é espazo vectorial, pois \circ non é unha operación externa.

3.1.6.- Exemplo.

1) $V = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 / (a, b) \text{ é solución da ecuación } 3x + 2y = 0\}$ coa suma de vectores usual en \mathbb{R}^2 e o produto dun escalar por un vector é un \mathbb{R} -espazo vectorial.

2) $V = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 / (a, b, c) \text{ é solución da ecuación } 3x + 4y + 5z = 0\}$ coa suma de vectores usual en \mathbb{R}^3 e o produto dun escalar por un vector é un \mathbb{R} -espazo vectorial.

3) $V = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 / (a, b, c) \text{ é solución do sistema } \begin{cases} 3x + 4y + 5z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}\}$ coa suma de vectores usual en \mathbb{R}^3 e o produto dun escalar por un vector é un \mathbb{R} -espazo vectorial.

3.1.7.- Proposición.

Se V é un K -espazo vectorial, entón:

i) $\alpha \circ v = 0_V \Leftrightarrow \alpha = 0_K \quad \text{ou} \quad v = 0_V.$

ii) $(-\alpha) \circ v = \alpha \circ (-v) = -(\alpha \circ v)$

Demostración.

i) " \Leftarrow "

$$\begin{aligned} 0_K \circ v &= (0_K + 0_K) \circ v = 0_K \circ v + 0_K \circ v \Rightarrow \\ \Rightarrow -(0_K \circ v) + [0_K \circ v] &= -(0_K \circ v) + [0_K \circ v + 0_K \circ v] \Rightarrow \\ \Rightarrow 0_V = 0_K \circ v &\Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha \circ 0_V &= \alpha \circ (0_V + 0_V) = \alpha \circ 0_V + \alpha \circ 0_V \Rightarrow \\ \Rightarrow -(\alpha \circ 0_V) + [\alpha \circ 0_V] &= -(\alpha \circ 0_V) + [\alpha \circ 0_V + \alpha \circ 0_V] \Rightarrow \\ \Rightarrow 0_V &= \alpha \circ 0_V \end{aligned}$$

" \Rightarrow "

Se $\alpha \neq 0 \Rightarrow \exists \alpha^{-1}$ e dado que $\alpha \circ v = 0_{\mathbf{V}}$ temos
 $0_{\mathbf{V}} = \alpha^{-1} \circ 0_{\mathbf{V}} = \alpha^{-1} \circ (\alpha \circ v) = (\alpha^{-1} \circ \alpha) \circ v = 1_{\mathbf{K}} \circ v = v$
En consecuencia ou $\alpha = 0$ ou $v = 0_{\mathbf{V}}$.

ii) $((-\alpha) \circ v) + (\alpha \circ v) = ((-\alpha) + \alpha) \circ v = 0_{\mathbf{K}} \circ v = 0_{\mathbf{V}}$

$$(\alpha \circ (-v)) + (\alpha \circ v) = \alpha \circ ((-v) + v) = \alpha \circ 0_{\mathbf{V}} = 0_{\mathbf{V}}$$

En consecuencia $(-\alpha) \circ v = \alpha \circ (-v) = -(\alpha \circ v)$

3.2. Subespazos dun espazo vectorial

3.2.1.- Definición.

Un subconxunto non baleiro U dun K -espazo vectorial V é un subespazo de V se:

1. $u_1 + u_2 \in U$ para todo $u_1, u_2 \in U$.
2. $\alpha u \in U$ para todo $u \in U$ e todo $\alpha \in K$.

Equivalentemente, $\alpha u + \beta u' \in U$ para todo $u, u' \in U$ e todo $\alpha, \beta \in K$.

Nótese que o vector cero de V está en U xa que como $U \neq \emptyset$ existe $u \in U$ e

$$0u = 0 \in U.$$

Ademais, U é un espazo vectorial coas mesmas operacións que V e tamén co mesmo neutro para a operación $+$:

3.2.2.- Exemplo.

1.- Os seguintes conxuntos son subespazos de \mathbb{R}^4 .

$$a) U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + y = 0, z - t = 0\}$$

$$W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x - 3y = z + 2t\}$$

2.- Os seguintes conxuntos son subespazos de \mathbb{R}^3 .

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + 3y = z\}$$

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x + 3y - z = 0\}$$

3.2.3.- Exemplo.

1) O exemplo 1 de 3.1.6. é un subespazo de \mathbb{R}^2 e os exemplos 2 e 3 de 3.1.6. son subespazos de \mathbb{R}^3 .

2) Se V é un espazo vectorial, entón $\{0\}$ e V son subespazos de V e chámanse subespazos triviais.

3) $U = \{(x, 0, y) / x, y \in \mathbb{R}\}$ é un subespazo de \mathbb{R}^3 .

4) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y = 1\}$ non é un subespazo de \mathbb{R}^3 .

5) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y = 0, x + 2y + z = 0\}$ é un subespazo de \mathbb{R}^3 .

6) $U = \{A \in M_n(\mathbb{R}) / A \text{ é diagonal}\}$ é un subespazo de $M_n(\mathbb{R})$.

7) O conxunto das solucións dun sistema homoxéneo de m ecuacións con n incógnitas con coeficientes en K é un subespazo de K^n .

3.2.4.- Exercicio.

1.- Estudiar se os seguintes subconxuntos de \mathbb{R}^4 son subespazos vectoriais:

$$U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + y = 0, z - t = 1\}$$

$$V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / 2x^3 = y^3\}$$

$$W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x - 3y = z + 2t\}$$

2.- Estudiar se os seguintes subconxuntos de \mathbb{R}^3 son subespazos vectoriais:

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + 3y = z\}$$

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = 1\}$$

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^3 = y^3\}$$

3.2.5.- Proposición.

Se V_1 e V_2 son subespazos de V , entón $V_1 \cap V_2$ é un subespazo de V .

En xeral, se $\{V_i\}_{i \in I}$ é unha familia de subespazos dun espazo vectorial V , entón $\bigcap_{i \in I} V_i$

$= \{v \in V / v \in V_i, \forall i \in I\}$ é un subespazo de V . Ademais é o maior subespazo de V contido en todos os $V_i, i \in I$.

Demostración.

1. Se $u_1, u_2 \in V_1 \cap V_2$, entón $u_1, u_2 \in V_1$ e $u_1, u_2 \in V_2$. Polo tanto

$$u_1 + u_2 \in V_1 \text{ e } u_1 + u_2 \in V_2$$

En consecuencia $u_1 + u_2 \in V_1 \cap V_2$ para todo $u_1, u_2 \in V_1 \cap V_2$.

2. Se $u \in V_1 \cap V_2$ e $\alpha \in K$, entón $\alpha u \in V_1$ e $\alpha u \in V_2$ e polo tanto,

$$\alpha u \in V_1 \text{ e } \alpha u \in V_2$$

En consecuencia $\alpha u \in V_1 \cap V_2$ para todo $u \in V_1 \cap V_2$ e todo $\alpha \in K$.

A proba do caso xeral é similar ao particular

É un exercicio sinxelo. É necesario probar que

1) $\bigcap_{i \in I} V_i$ é subgrupo de $(V, +)$.

2) $\alpha \circ v \in \bigcap_{i \in I} V_i, \forall \alpha \in K, \forall v \in \bigcap_{i \in I} V_i$.

Para elo temos que ver que:

$$1) v, w \in \bigcap_{i \in I} V_i, \text{ entón } v + w \in \bigcap_{i \in I} V_i.$$

$$2) \alpha \circ v \in \bigcap_{i \in I} V_i, \forall \alpha \in K, \forall v \in \bigcap_{i \in I} V_i.$$

3.2.6.- Exemplos.

$$1) \quad V_1 = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3\} \text{ é subespazo de } \mathbb{R}^3.$$

$$V_2 = \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3\} \text{ é subespazo de } \mathbb{R}^3.$$

$$V_1 \cap V_2 = \{(x, 0, 0) \in \mathbb{R}^3\} \text{ é subespazo de } \mathbb{R}^3.$$

2) Os subespazos de \mathbb{R}^n son os “planos, rectas, etc., que pasan pola orixe”.

3) O subconxunto de \mathbb{R}^2 dado polas solucións da ecuación $3x + 2y = 0$. É dicir:

$$V = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 / (a, b) \text{ é solución da ecuación } 3x + 2y = 0\} \text{ é subespazo de } \mathbb{R}^2.$$

4) O subconxunto de \mathbb{R}^3 dado polas solucións da ecuación $3x + 4y + 5z = 0$. É dicir:

$$V = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 / (a, b, c) \text{ é solución da ecuación } 3x + 4y + 5z = 0\} \text{ é subespazo de } \mathbb{R}^3.$$

5) O subconxunto de \mathbb{R}^3 dado polas solucións da ecuación $2x + y - z = 0$. É dicir:

$$V = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 / (a, b, c) \text{ é solución da ecuación } 2x + y - z = 0\} \text{ é subespazo de } \mathbb{R}^3.$$

6) O subconxunto de \mathbb{R}^3 dado polas solucións o sistema
$$\begin{cases} 3x + 4y + 5z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$$
. É dicir:

$$V = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 / (a, b, c) \text{ é solución do sistema } \begin{cases} 3x + 4y + 5z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}\} \text{ é un subespazo de}$$

\mathbb{R}^3 .

É obvio que este subespazo coincide coa intersección dos dous subespazos anteriores.

3.2.7.- Nota.

Obsérvese que a unión de subespazos vectoriais non é subespazo vectorial. Por exemplo a unión das dúas rectas de \mathbb{R}^2 , $x = 0$ e $y = 0$ non é subespazo vectorial de \mathbb{R}^2 .

3.2.8.- Definición.

Se V_1 e V_2 son subespazos dun espazo vectorial V , entón defínese o subespazo suma de V_1 e V_2 como o subespazo

$$V_1 + V_2 = \{v_1 + v_2 / v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}.$$

É fácil ver que $V_1 + V_2$ é un subespazo de V .

3.3.- Sistemas de xeradores

3.3.1.- Definición.

Sexa S un conxunto de vectores dun espazo vectorial $(\mathbf{V}, \mathbf{K}, \circ)$. Dise que un vector $v \in \mathbf{V}$ é **combinación lineal** dos vectores do conxunto S , se existen $v_1, \dots, v_n \in S, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbf{K}$ tal que $v = \alpha_1 \circ v_1 + \alpha_2 \circ v_2 + \dots + \alpha_n \circ v_n$.

3.3.2.- Exemplo.

1) No espazo vectorial \mathbb{R}^2 o vector $(2, 2)$ é combinación lineal dos vectores

$(1, 1)$ e $(3, 1)$ pois $(2, 2) = 2(1, 1) + 0(3, 1)$.

2) No espazo vectorial \mathbb{R}^3 o vector $(1, 1, 1)$ é combinación lineal dos vectores

$(1, 1, 0)$ e $(3, 3, 1)$ pois $(1, 1, 1) = 1(3, 3, 1) - 2(1, 1, 0)$.

3) No espazo vectorial \mathbb{R}^4 se consideramos o conxunto

$S = \{(1, 1, 0, 3), (3, 3, 0, 1), (2, 2, 0, -2)\}$, entón o vector $(5, 4, 0, 0)$ non é combinación lineal dos vectores de S , pero o vector $(3, 3, 0, 17)$ é combinación lineal dos vectores de S pois $(3, 3, 0, 17) = 2(1, 1, 0, 3) + 3(3, 3, 0, 1) - 4(2, 2, 0, -2)$.

Pode verse que esta non é a única combinación lineal posible deses tres vectores que da o mesmo vector $(3, 3, 0, 17)$, pois por exemplo

$(3, 3, 0, 17) = 6(1, 1, 0, 3) - 1(3, 3, 0, 1) + 0(2, 2, 0, -2)$.

3.3.3.- Proposición.

Sexa $(\mathbf{V}, \mathbf{K}, \circ)$ un espazo vectorial e S un subconxunto de \mathbf{V} . O conxunto de combinacións lineais formadas cos vectores de S , que denotaremos por $\langle S \rangle$, é o menor subespazo de $(\mathbf{V}, \mathbf{K}, \circ)$ que contén ao conxunto S . É dicir, o conxunto

$\langle S \rangle = \{\alpha_1 \circ v_1 + \alpha_2 \circ v_2 + \dots + \alpha_n \circ v_n / \alpha_i \in \mathbf{K}, v_i \in S, i = 1, \dots, n\}$ verifica que

- é un subespazo de $(\mathbf{V}, \mathbf{K}, \circ)$,

- contén ao conxunto S e

- está contido en todos aqueles subespazos de $(\mathbf{V}, \mathbf{K}, \circ)$ que conteñen ao conxunto S .

Demostración.

i) É un exercicio sinxelo. É necesario probar que

1) $u_1 + u_2 \in \langle S \rangle$ para todo $u_1, u_2 \in \langle S \rangle$.

2) $\alpha \circ v \in \langle S \rangle, \forall \alpha \in K, \forall v \in \langle S \rangle$.

En efecto:

1) Sexa $v, v' \in \langle S \rangle$, con

$$v = \alpha_1 \circ v_1 + \alpha_2 \circ v_2 + \dots + \alpha_n \circ v_n, \alpha_i \in K, v_i \in S, i = 1, \dots, n$$

$$v' = \beta_1 \circ v'_1 + \beta_2 \circ v'_2 + \dots + \beta_m \circ v'_m, \beta_i \in K, v'_i \in S, i = 1, \dots, m.$$

Entón

$$\begin{aligned} v + v' &= (\alpha_1 \circ v_1 + \alpha_2 \circ v_2 + \dots + \alpha_n \circ v_n) + (\beta_1 \circ v'_1 + \beta_2 \circ v'_2 + \dots + \beta_m \circ v'_m) = \\ &= \alpha_1 \circ v_1 + \alpha_2 \circ v_2 + \dots + \alpha_n \circ v_n + \beta_1 \circ v'_1 + \beta_2 \circ v'_2 + \dots + \beta_m \circ v'_m \text{ que sigue sendo} \\ &\text{unha combinación lineal de vectores de } S. \end{aligned}$$

2) Se $v = \alpha_1 \circ v_1 + \alpha_2 \circ v_2 + \dots + \alpha_n \circ v_n, \alpha_i \in K, v_i \in S, i = 1, \dots, n$ e $\alpha \in K$ entón

$$\alpha \circ v = \alpha \circ (\alpha_1 \circ v_1 + \alpha_2 \circ v_2 + \dots + \alpha_n \circ v_n) = (\alpha \alpha_1) \circ v_1 + (\alpha \alpha_2) \circ v_2 + \dots + (\alpha \alpha_n) \circ v_n.$$

En consecuencia $\alpha \circ v$ sigue sendo unha combinación lineal de elementos de S pois $(\alpha \alpha_i) \in K, v_i \in S, i = 1, \dots, n$.

Polo tanto $\langle S \rangle$ é subespazo de V .

ii) $\forall v \in S \Rightarrow v = 1_K \circ v \Rightarrow v \in \langle S \rangle$, co que $S \subset \langle S \rangle$.

iii) Se V' é un subespazo de (V, K, \circ) con $S \subset V'$, entón

$(\alpha \circ v) \in V', \forall \alpha \in K, \forall v \in S$ e polo tanto

$$\alpha_i \in K, v_i \in S, i = 1, \dots, n \Rightarrow (\alpha_1 \circ v_1 + \alpha_2 \circ v_2 + \dots + \alpha_n \circ v_n) \in V'$$

3.3.4. Exemplo.

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = y\} = \{x(1, 1, 0) + z(0, 0, 1) / x, z \in \mathbb{R}\} = \langle \{(1, 1, 0), (0, 0, 1)\} \rangle.$$

3.3.5.- Proposición.

Se V_1 e V_2 son subespazos dun espazo vectorial V , entón $V_1 + V_2 = \langle V_1 \cup V_2 \rangle$

Demostración.

É claro que $V_1 + V_2$ é o menor subespazo de V que contén a $V_1 \cup V_2$.

3.3.6.- Corolario.

Como consecuencia da Proposición 3.3.3. anterior temos que:

$$S \subset S' \Rightarrow \langle S \rangle \subset \langle S' \rangle \quad \text{e} \quad \langle \langle S \rangle \rangle = \langle S \rangle$$

3.3.7. Nota.

Se S e S' son subconjuntos de V

$$\langle S \rangle = \langle S' \rangle \Leftrightarrow \begin{cases} \langle S \rangle \subset \langle S' \rangle \\ \langle S' \rangle \subset \langle S \rangle \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S \subset \langle S' \rangle \\ S' \subset \langle S \rangle \end{cases}$$

En particular se $S \subset V$ e $v \in V$ temos que

$$\langle S \rangle = \langle S \cup \{v\} \rangle \Leftrightarrow v \in \langle S \rangle$$

Como consecuencia temos que nun conxunto de xeradores S pódese eliminar un vector v se, y só si, v é combinación lineal dos demais elementos de S . É dicir, si $v \in S$

$$\langle S \rangle = \langle S - \{v\} \rangle \Leftrightarrow v \in \langle S - \{v\} \rangle$$

3.3.8.- Exercício.

No espazo vectorial $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, \circ)$ temos que

$$\langle \{ (1, 0, 0), (0, 1, 0) \} \rangle = \{ (x, y, 0) / x, y \in \mathbb{R} \}.$$

$$\langle \{ (1, 1, 0), (0, 1, 0) \} \rangle = \{ (x, y, 0) / x, y \in \mathbb{R} \}.$$

$$\langle \{ (1, 1, 0), (0, 1, 1) \} \rangle = \{ (x, x+z, z) / x, z \in \mathbb{R} \}.$$

3.3.9.- Definición.

Sexa (V, K, \circ) un espazo vectorial. Un conxunto de vectores S de V dise que é **libre** ou **linealmente independente** se para $\alpha_i \in K$, $v_i \in S$, $i = 1, \dots, n$, con todos os v_i distintos, a igualdade $\alpha_1 \circ v_1 + \alpha_2 \circ v_2 + \dots + \alpha_n \circ v_n = 0$, só se verifica para

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0.$$

É dicir:

$$\alpha_i \in K, v_i \in S, i = 1, \dots, n, \alpha_1 \circ v_1 + \alpha_2 \circ v_2 + \dots + \alpha_n \circ v_n = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0, \forall i.$$

3.3.10.- Exercício.

Probar que:

1) $\{(1, 0, 1, 0, 3), (0, 2, 1, 1, 2), (1, 2, 2, 1, 0)\}$ é un conxunto de vectores de \mathbb{R}^5 linealmente independentes.

2) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right\}$ é un conxunto de vectores do \mathbb{R} -espazo

vectorial $\text{Mat}_{2 \times 3}(\mathbb{R})$, linealmente independentes.

3.3.11.- Definición.

Sexa $(\mathbf{V}, \mathbf{K}, \circ)$ un espazo vectorial. Un conxunto de vectores S de \mathbf{V} dise **ligado** ou **linealmente dependente** se non é libre. É dicir: existen

$\alpha_i \in \mathbf{K}$, $v_i \in S$, $i = 1, \dots, n$, con todos os v_i distintos e algún $\alpha_i \neq 0$ e

$$\alpha_1 \circ v_1 + \alpha_2 \circ v_2 + \dots + \alpha_n \circ v_n = 0.$$

3.3.12.- Nota.

Sexa $(\mathbf{V}, \mathbf{K}, \circ)$ un espazo vectorial. Entón:

$S = \{0\}$ é un conxunto linealmente dependente

$$(1_{\mathbf{K}} \circ 0_{\mathbf{V}} = 0_{\mathbf{V}}, 1_{\mathbf{K}} \neq 0_{\mathbf{K}})$$

Se $v \in \mathbf{V}$, $v \neq 0$, entón $S = \{v\}$ é un conxunto linealmente independente (Proposición 3.1.7. i))

3.3.13.- Nota.

Sexa $(\mathbf{V}, \mathbf{K}, \circ)$ un espazo vectorial e S un conxunto de vectores de \mathbf{V} . Entón:

Se S é un conxunto linealmente independente e $S' \subset S$, entón S' é un conxunto linealmente independente.

Se S é un conxunto linealmente dependente e $S \subset S'$, entón S' é un conxunto linealmente dependente.

3.3.14.- Nota.

Calquera conxunto de vectores que conteña ao vector 0 é linealmente dependente.

3.3.15.- Proposición.

Se S é un conxunto de vectores dun espazo vectorial $(\mathbf{V}, \mathbf{K}, \circ)$, entón:

S é linealmente dependente se, e só se, existe $v \in S$ tal que $v \in \langle S - \{v\} \rangle$.

Ademais nesta situación temos que $\langle S \rangle = \langle S - \{v\} \rangle$.

Nótese que esto é equivalente a dicir que

S é linealmente independente se, e só se, $v \notin \langle S - \{v\} \rangle$, $\forall v \in S$.

Demostración:

" \Rightarrow " Sexa $v_i \in S$, $\alpha_i \in K$, $i = 1, \dots, n$, con algún $\alpha_i \neq 0$ e

$$\alpha_1 \circ v_1 + \alpha_2 \circ v_2 + \dots + \alpha_n \circ v_n = 0.$$

Podemos supoñer, sen perda de xeneralidade (basta con reordenar os vectores e escalares), que $\alpha_1 \neq 0$. Entón $-\alpha_1 \neq 0$ e $\exists (-\alpha_1)^{-1} \in K$. Así

$$\alpha_2 \circ v_2 + \dots + \alpha_n \circ v_n = (-\alpha_1) \circ v_1$$

$$\begin{aligned} v_1 &= (-\alpha_1)^{-1} \circ (-\alpha_1) \circ v_1 = (-\alpha_1)^{-1} \circ (\alpha_2 \circ v_2 + \dots + \alpha_n \circ v_n) = \\ &= ((-\alpha_1)^{-1} \circ \alpha_2) \circ v_2 + \dots + ((-\alpha_1)^{-1} \circ \alpha_n) \circ v_n \in \langle S - \{v_1\} \rangle \end{aligned}$$

" \Leftarrow " Se $v \in \langle S - \{v\} \rangle$, entón

$$v = \alpha_1 \circ v_1 + \alpha_2 \circ v_2 + \dots + \alpha_n \circ v_n, v_i \in S, \alpha_i \in K, v_i \neq v, i = 1, \dots, n.$$

Logo $(-1_K) \circ v + \alpha_1 \circ v_1 + \alpha_2 \circ v_2 + \dots + \alpha_n \circ v_n = 0$, con $-1_K \neq 0_K$ e polo tanto S é un conxunto linealmente dependente.

Ademais

$$S - \{v\} \subset S \Rightarrow \langle S - \{v\} \rangle \subset \langle S \rangle$$

$$v \in \langle S - \{v\} \rangle \Rightarrow S \subset \langle S - \{v\} \rangle \Rightarrow \langle S \rangle \subset \langle \langle S - \{v\} \rangle \rangle = \langle S - \{v\} \rangle$$

3.3.16.- Proposición.

Se (V, K, \circ) é un espazo vectorial, S é un conxunto de vectores linealmente independente e $v \notin \langle S \rangle$, entón $S \cup \{v\}$ é un conxunto linealmente independente.

Demostración.

Sexa $\alpha \circ v + \alpha_1 \circ v_1 + \alpha_2 \circ v_2 + \dots + \alpha_n \circ v_n = 0$, $v_i \in S$, $\alpha_i \in K$, $i = 1, \dots, n$.

Se $\alpha \neq 0$, entón $-\alpha \neq 0$ y $\exists (-\alpha)^{-1}$. En consecuencia "despexamos" v e

$$v = (-\alpha)^{-1} \circ (\alpha_1 \circ v_1 + \alpha_2 \circ v_2 + \dots + \alpha_n \circ v_n) \in \langle S \rangle$$

en contradición coa hipótese inicial.

Logo $\alpha = 0$.

$\alpha = 0 \Rightarrow \alpha_1 \circ v_1 + \alpha_2 \circ v_2 + \dots + \alpha_n \circ v_n = 0$, $v_i \in S$, $\alpha_i \in K$, $i = 1, \dots, n$, e dado que S é un conxunto linealmente independente temos que $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$

e polo tanto $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

3.3.17.- Definición.

Sexa V un espazo vectorial sobre K e S un conxunto de vectores de V . Dise que S é un **sistema de xeradores** de V se $\langle S \rangle = V$. É dicir, S é un sistema de xeradores de V se calquera vector de V é combinación lineal dos vectores de S .

3.3.18.- Exemplos.

$\{(1, 1), (1, 2)\}$ é un conxunto de xeradores de \mathbb{R}^2 .

$\{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (-1, -2, 1)\}$ non é un conxunto de xeradores de \mathbb{R}^3 .

$\{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 2, 1)\}$ é un conxunto de xeradores de \mathbb{R}^3 .

En efecto:

i) Temos que probar que para calquera vector (a, b) de \mathbb{R}^2 existen α e β , tales que

$$\alpha(1, 1) + \beta(1, 2) = (a, b)$$

Se tomamos por exemplo o vector $(7, 9)$ basta tomar

$$\alpha = 5; \beta = 2.$$

En xeral para calquera vector (a, b) é necesario que

$$\alpha + \beta = a$$

$$\alpha + 2\beta = b.$$

Para elo, vemos que

$$\alpha = 2a - b$$

$$\beta = b - a.$$

ii) Temos que probar que existe un vector de \mathbb{R}^3 que non é combinación lineal dos vectores $\{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (-1, -2, 1)\}$.

Se tomamos, por exemplo, o vector $(2, 1, 3)$ non existen α, β e γ tales que

$\alpha(1, 0, 1) + \beta(1, 1, 0) + \gamma(-1, -2, 1) = (2, 1, 3)$. En efecto para que se verifique esta

igualdade é necesario que

$$\alpha + \beta - \gamma = 2$$

$$\beta - 2\gamma = 1$$

$$\alpha + \gamma = 3.$$

Resolvemos o sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F3-F1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F3+F2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Como é un sistema incompatible non existen α , β e γ tales que

$$\alpha(1, 0, 1) + \beta(1, 1, 0) + \gamma(-1, -2, 1) = (2, 1, 3).$$

iii) Temos que probar que para calquera vector (a, b, c) de \mathbb{R}^3 existen α , β e γ tales que $\alpha(1, 0, 1) + \beta(1, 1, 0) + \gamma(1, 2, 1) = (a, b, c)$. En efecto para que se verifique esta igualdade é necesario que

$$\alpha + \beta + \gamma = a$$

$$\beta + 2\gamma = b$$

$$\alpha + \gamma = c.$$

Resolvemos o sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 2 & b \\ 1 & 0 & 1 & c \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 2 & b \\ 0 & -1 & 0 & c-a \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3+F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 2 & b \\ 0 & 0 & 2 & c-a+b \end{pmatrix}$$

Vemos que é un S.C.D., independentemente dos valores de (a, b, c) .

Como é un sistema compatible, existen α , β e γ tales que

$$\alpha(1, 0, 1) + \beta(1, 1, 0) + \gamma(1, 2, 1) = (a, b, c).$$

$$\gamma = (c + b - a)/2$$

$$\beta = b - 2((c + b - a)/2) = a - c$$

$$\alpha = a - ((c + b - a)/2) - (a - c) = (c - b + a)/2$$

Por exemplo se tomamos o vector $(6, 4, 8)$ e tomamos

$$\alpha = 5$$

$$\beta = -2$$

$$\gamma = 3$$

$$5(1, 0, 1) - 2(1, 1, 0) + 3(1, 2, 1) = (6, 4, 8).$$

3.3.19.- Exercicio.

Proba que:

i) $S = \{(1, 1, 1), (5, 0, 3)\}$ é un conxunto de xeradores do subespazo vectorial de \mathbb{R}^3

$$V = \{(x, y, z) / 3x + 2y - 5z = 0\}.$$

ii) $S = \{(6, 3, -2), (-5, 4, 6)\}$ é un conxunto de xeradores do subespazo vectorial de \mathbb{R}^3

$$V = \{(x, y, z) / 2x - 2y + 3z = 0\}.$$

iii) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \right\}$ é un conxunto de vectores xerador do

\mathbb{R} -espazo vectorial $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$; ¿É un conxunto linealmente independente?.

3.3.20.- Proposición.

Sexa $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ un conxunto de vectores dun espazo vectorial V .

i) Se intercambiamos dous vectores, entón

$$\langle \{v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n\} \rangle = \langle \{v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n\} \rangle$$

e se

$S = \{v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n\}$ é un conxunto linealmente independente, tamén o é

$$S' = \{v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n\}$$

ii) Se multiplicamos un vector, por un escalar $\lambda \neq 0$, entón

$$\langle \{v_1, \dots, v_i, \dots, v_n\} \rangle = \langle \{v_1, \dots, \lambda v_i, \dots, v_n\} \rangle$$

e se

$S = \{v_1, \dots, v_i, \dots, v_n\}$ é un conxunto linealmente independente, tamén o é

$$S' = \{v_1, \dots, \lambda v_i, \dots, v_n\}$$

iii) Se substituímos un vector polo resultado de sumarlle outro vector multiplicado por un escalar λ , por exemplo substituímos v_i por $v_i + \lambda v_j$, entón

$$\langle \{v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n\} \rangle = \langle \{v_1, \dots, v_i + \lambda v_j, \dots, v_j, \dots, v_n\} \rangle$$

e se

$S = \{v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n\}$ é un conxunto linealmente independente, tamén o é

$$S' = \{v_1, \dots, v_i + \lambda v_j, \dots, v_j, \dots, v_n\}$$

Demostración:

i) É evidente.

Por comodidade de notación, probamos ii) e iii) para índices baixos. O caso xeral é análogo, ou utilizamos a propiedade i) e sempre podemos colocar os vectores afectados ao principio.

ii) “ \subseteq ” É claro que $\langle \{\lambda v_1, v_2, \dots, v_n\} \rangle \subseteq \langle S \rangle$ e polo tanto $\langle \{\lambda v_1, v_2, \dots, v_n\} \rangle \subseteq \langle S \rangle$

“ \supseteq ” $v_1 \in \langle \{\lambda v_1, v_2, \dots, v_n\} \rangle$ pois $v_1 = \lambda^{-1}(\lambda v_1)$ e polo tanto é claro que

$$S \subseteq \langle \{\lambda v_1, v_2, \dots, v_n\} \rangle \text{ e polo tanto } \langle S \rangle \subseteq \langle \{\lambda v_1, v_2, \dots, v_n\} \rangle.$$

Se $S = \{v_1, \dots, v_i, \dots, v_n\}$ é un conxunto linealmente independente entón

$$\alpha_1(\lambda v_1) + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0 \Rightarrow (\alpha_1 \lambda) v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (\alpha_1 \lambda) = 0, \alpha_2 = 0, \dots, \alpha_n = 0 \text{ e polo tanto } \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0 \text{ e}$$

$S' = \{\lambda v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é un conxunto linealmente independente.

iii) “ \subseteq ” É claro que $\langle \{v_1 + \lambda v_2, v_2, \dots, v_n\} \rangle \subseteq \langle S \rangle$ e polo tanto

$$\langle \{v_1 + \lambda v_2, v_2, \dots, v_n\} \rangle \subseteq \langle S \rangle.$$

“ \supseteq ” $v_1 \in \langle \{v_1 + \lambda v_2, v_2, \dots, v_n\} \rangle$ pois $v_1 = (v_1 + \lambda v_2) - \lambda v_2$ e polo tanto é claro que

$$S \subseteq \langle \{v_1 + \lambda v_2, v_2, \dots, v_n\} \rangle \text{ e polo tanto } \langle S \rangle \subseteq \langle \{v_1 + \lambda v_2, v_2, \dots, v_n\} \rangle .$$

Se $S = \{v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n\}$ é un conxunto linealmente independente entón

$$\alpha_1(v_1 + \lambda v_2) + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 v_1 + (\alpha_1 \lambda + \alpha_2) v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \alpha_1 = 0, (\alpha_1 \lambda + \alpha_2) = 0, \alpha_3 = 0, \dots, \alpha_n = 0 \text{ e polo tanto } \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0 \text{ e}$$

$S' = \{v_1 + \lambda v_2, v_2, \dots, v_n\}$ é un conxunto linealmente independente.

3.3.21.- Exemplo.

a) Os conxuntos $S = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1)\}$ e $S' = \{(3, 2, 1), (0, 1, -1)\}$ xeran o mesmo subespazo vectorial de \mathbb{R}^3 .

b) Os conxuntos $S = \{(1, 1, 0), (2, 0, 2)\}$ e $S' = \{(3, 2, 3), (0, 1, 0)\}$ non xeran o mesmo subespazo vectorial de \mathbb{R}^3 .

En efecto:

$$\text{a) } \langle S \rangle = \langle \{(1, 1, 0), (1, 0, 1)\} \rangle \stackrel{v_2 - v_1}{=} \langle \{(1, 1, 0), (0, -1, 1)\} \rangle \stackrel{(-1)v_2}{=} \\ = \langle \{(1, 1, 0), (0, 1, -1)\} \rangle.$$

$$\langle S' \rangle = \langle \{(3, 2, 1), (0, 1, -1)\} \rangle \stackrel{v_1 - 2v_2}{=} \langle \{(3, 0, 3), (0, 1, -1)\} \rangle \stackrel{(1/3)v_1}{=} \\ = \langle \{(1, 0, 1), (0, 1, -1)\} \rangle \stackrel{v_1 + v_2}{=} \langle \{(1, 1, 0), (0, 1, -1)\} \rangle.$$

$$\text{b) } \langle S \rangle = \langle \{(1, 1, 0), (2, 0, 2)\} \rangle \stackrel{v_2 - 2v_1}{=} \langle \{(1, 1, 0), (0, -2, 2)\} \rangle \stackrel{(-1/2)v_2}{=} \\ = \langle \{(1, 1, 0), (0, 1, -1)\} \rangle.$$

$$\langle S' \rangle = \langle \{(3, 2, 3), (0, 1, 0)\} \rangle \stackrel{v_1 - 2v_2}{=} \langle \{(3, 0, 3), (0, 1, 0)\} \rangle \stackrel{(1/3)v_1}{=} \langle \{(1, 0, 1), (0, 1, 0)\} \rangle.$$

O vector $(0, 1, 0)$ non pertence a $\langle S \rangle$ xa que non existen α e β tales que $\alpha(1, 1, 0) + \beta(0, 1, -1) = (0, 1, 0)$.

3.3.22.- Exemplo.

En \mathbb{R}^5 :

$$\begin{aligned} &\langle \{(1, 1, -1, 2, 1), (2, 1, -7, 4, 1), (8, 6, 4, 1, 3), (1, -1, 2, 0, 0)\} \rangle = \\ &= \langle \{(1, 1, -1, 2, 1), (0, 1, 5, 0, 1), (0, 0, 1, -15/22, -3/22), (0, 0, 0, 1, 61/151)\} \rangle = \\ &= \langle \{(1, 1, -1, 2, 1), (0, 1, 5, 0, 1), (0, 0, 22, -15, -3), (0, 0, 0, 151, 61)\} \rangle. \end{aligned}$$

En efecto, se consideramos a matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -7 & 4 & 1 \\ 8 & 6 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ podemos considerar as súas filas como vectores de } \mathbb{R}^5 \text{ e facer}$$

transformacións das indicadas na Proposición 3.3.20. para conseguir a matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 22 & -15 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 151 & 61 \end{pmatrix}$$

En consecuencia os vectores fila destas dúas matrices xeran o mesmo subespazo vectorial de \mathbb{R}^5 .

Cando podemos pasar dunha matriz A a unha matriz B facendo transformacións das indicadas na Proposición 3.3.20. dise que as matrices A e B son equivalentes por filas.

3.4. Bases e dimensión dun espazo vectorial

Introducimos a continuación o concepto de base que é esencial para o estudo dos espazos vectoriais. Trataremos, unicamente, o caso de espazos vectoriais finitamente xerados, aínda que os resultados son válidos para espazos vectoriais xerais.

3.4.1.- Definición.

Un conxunto de vectores de V , $B = \{ E_1, \dots, E_n \}$, é unha **base** de V se:

1. B é un conxunto linealmente independente
2. B é un conxunto de xeradores de V .

3.4.2.- Exercicio.

Bases dos \mathbb{R} -espazos $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \dots$,

Bases dos \mathbb{Q} -espazos $\mathbb{Q}, \mathbb{Q}^2, \mathbb{Q}^3, \dots$,

Bases dos \mathbb{C} -espazos $\mathbb{C}, \mathbb{C}^2, \mathbb{C}^3, \dots$,

¿Coñeces algunha base do \mathbb{R} -espazo vectorial $\mathbb{R}[x]$?

3.4.3.- Proposición.

Para un espazo vectorial V e B un conxunto de vectores de V , as seguintes afirmacións son equivalentes.

- i) B é unha base de V .
- ii) $\langle B \rangle = V$ e se $v \in B$, $\langle B - \{v\} \rangle \neq V$ (é dicir: B é un conxunto minimal de xeradores de V)
- iii) B é un conxunto de vectores de V linealmente independentes e se $v \notin B$, $B \cup \{v\}$ é un conxunto linealmente dependente (é dicir: B é un conxunto maximal de vectores de V linealmente independentes)

Demostración.

i) \Rightarrow ii) B base $\Rightarrow B$ conxunto de xeradores e B conxunto de vectores linealmente independentes $\Rightarrow \langle B \rangle = V$ e se $v \in B$, $v \notin \langle B - \{v\} \rangle \Rightarrow \langle B - \{v\} \rangle \neq V$.

ii) \Rightarrow i) $\langle B \rangle = V \Rightarrow B$ é un conxunto de xeradores. Só falta ver que B é un conxunto de vectores linealmente independentes.

Se non fosen linealmente independentes, entón $\exists v \in B, v \in \langle B - \{v\} \rangle$ e polo tanto $v \in \langle B - \{v\} \rangle = \langle B \rangle = V$.

i) \Rightarrow iii) B base $\Rightarrow B$ conxunto de vectores linealmente independentes e $\langle B \rangle = V$.

En consecuencia B conxunto de vectores linealmente independentes e se $v \notin B, B \cup \{v\}$ é un conxunto linealmente dependente

iii) \Rightarrow i) Só falta ver que $\langle B \rangle = V$. Se $\langle B \rangle \neq V$, entón $\exists v \in V, v \notin \langle B \rangle$ e polo tanto $B \cup \{v\}$ sería un conxunto linealmente independente (Prop. 3.3.16)

3.4.4.- Proposición.

Se V é un espazo vectorial, $L = \{ E_1, \dots, E_r \}$ é un conxunto de vectores linealmente

independentes e $v = \sum_{i=1}^r \alpha_i \circ E_i$, entón os escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$, son únicos.

Demostración.

Se $v = \sum_{i=1}^r \alpha_i \circ E_i$ e tamén $v = \sum_{i=1}^r \beta_i \circ E_i$, entón

$0 = v - v = \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i \circ E_i \right) - \left(\sum_{i=1}^r \beta_i \circ E_i \right) = \sum_{i=1}^r (\alpha_i - \beta_i) \circ E_i$ e dado que L é un conxunto

linealmente independente tense que $(\alpha_i - \beta_i) = 0, \forall i$, de onde $\alpha_i = \beta_i, i= 1, \dots, r$.

3.4.4.b.- Exercício.

Se V é un espazo vectorial, $L = \{ E_1, \dots, E_r \}$ é un conxunto de vectores de V e existe $v \in V$ tal que $v = \alpha_1 E_1 + \dots + \alpha_r E_r$ de forma única, entón $\{ E_1, \dots, E_r \}$ é un conxunto de vectores linealmente independentes.

3.4.5.- Corolario.

Se V é un espazo vectorial e $B = \{ E_1, \dots, E_n \}$ é unha base de V , entón cada vector $v \in V$ pode expresarse de forma única como combinación lineal dos elementos de B .

Demostración.

Por ser B un conxunto de xeradores temos que

$$v = \lambda_1 \circ E_1 + \lambda_2 \circ E_2 + \dots + \lambda_n \circ E_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i \circ E_i$$

Por ser B un conxunto de vectores linealmente independentes, a proposición anterior asegúranos a unicidade dos escalares.

3.4.6.- Definición.

Se V é un espazo vectorial e $B = \{ E_1, \dots, E_n \}$ é unha base de V, entón

$$v = \sum_{i=1}^n \lambda_i \circ E_i \text{ e os escalares } \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \text{ (que están univocamente determinados)}$$

denomínanse **coordenadas do vector** v respecto da base B.

Obsérvese que fixada a base B, entón coñécese $v \in V$ se, e só se, se coñecen as súas coordenadas respecto de B.

3.4.7.- Exemplos.

Sexa $B = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ unha base de \mathbb{R}^3 . Calcular o vector $v \in \mathbb{R}^3$, tal que as súas coordenadas respecto de B son (1, 8, 7) (e dicir $v = (1, 8, 7)_B$).

Para ver que B é unha base hai que ver que é un conxunto de vectores linealmente independentes e que é un conxunto de xeradores.

$$v = (1, 8, 7)_B = 1(1, 1, 0) + 8(1, 0, 1) + 7(0, 1, 1) = (9, 8, 15)$$

3.4.8.- Exemplo.

a) Se n é un enteiro positivo, entón \mathbb{R}^n é un \mathbb{R} -espazo vectorial e o conxunto $B = \{ e_1, \dots, e_n \}$, con $e_i = (0, \dots, 0, \overset{i}{1}, 0, \dots, 0)$, é unha \mathbb{R} -base de \mathbb{R}^n que denominaremos **base canónica**.

b) $B = \{(1, 1, 1), (1, 2, 0), (0, -1, 2)\}$ é una base de \mathbb{R}^3 .

3.4.9.- Teorema (de existencia de base).

Sexa $V \neq \{0\}$ un espazo vectorial con un conxunto finito de xeradores S. Entón, existe un subconxunto B de S que é unha base de V.

Demostración.

Nótese que xa que $V \neq \{0\}$ todo conxunto de xeradores de V ten a lo menos un vector distinto de 0.

Se S é linealmente independente xa é una base.

En caso contrario, existe $v \in S$ que é combinación lineal dos restantes e

$$\langle S - \{v\} \rangle = \langle S \rangle = V.$$

Se este novo conxunto de xeradores é linealmente independente xa é unha base de V .

Noutro caso existe $v' \in S - \{v\}$ que é combinación lineal dos restantes e

$$\langle S - \{v, v'\} \rangle = \langle S - \{v\} \rangle = V.$$

Repetindo o proceso, tantas veces como sexa necesario, chégase a un sistema de xeradores linealmente independentes xa que, no peor dos casos, encontraríamos un conxunto xerador con un único vector que ao ser distinto de 0 xa é linealmente independente.

3.4.10.-.

Obsérvense as similitudes e diferencias entre as dúas proposicións **3.4.10a** e **3.4.10b** que seguen:

3.4.10a.- Proposición.

Se V é un espazo vectorial cunha base finita de n elementos e $L = \{E_1, E_2, \dots, E_r\}$ é un conxunto de vectores linealmente independentes, entón podemos conseguir unha base de V que conteña a L (engadir vectores a L para completar unha base de V). Como veremos que todas as bases ten o mesmo número de elementos, necesariamente engadiremos $n - r$ elementos.

Demostración.

Sexa $B = \{F_1, F_2, \dots, F_n\}$ unha base de V .

Se $F_1 \in \langle L \rangle$, tomamos $L_1 = L = \{E_1, E_2, \dots, E_r\}$

Se $F_1 \notin \langle L \rangle$, tomamos $L_1 = L \cup \{F_1\} = \{E_1, E_2, \dots, E_r, F_1\}$ que é un conxunto de vectores linealmente independentes, por 3.3.16.

Se $F_2 \in \langle L_1 \rangle$, tomamos $L_2 = L_1$,

Se $F_2 \notin \langle L_1 \rangle$, tomamos $L_2 = L_1 \cup \{F_2\}$ que é un conxunto de vectores linealmente independentes, de novo por 3.3.16.

Continuando con este proceso, conseguimos un conxunto de vectores, L_n , linealmente independentes tal que $L \subset L_n$ e $F_i \in \langle L_n \rangle$, $i = 1, \dots, n$, polo que $B \subset \langle L_n \rangle \Rightarrow V \subset \langle L_n \rangle$

En consecuencia L_n é unha base de V que contén a L .

3.4.10b.- Proposición (Teorema de Steinitz)

Se V é un espazo vectorial cunha base finita de n elementos, $B = \{F_1, F_2, \dots, F_n\}$ base de V e $L = \{E_1, E_2, \dots, E_r\}$ é un conxunto de vectores linealmente independentes, entón podemos substituír r vectores de B polos r vectores de L para obter unha nova base de V .

Demostración.

Teñamos en conta que por ser L un conxunto de vectores linealmente independentes todos os vectores de L son distintos de cero.

Faremos unha demostración por inducción que nos permite ver como teríamos que facer, na práctica, para substituír E_1 , a continuación E_2 , e así sucesivamente.

1) Substitución do primeiro vector E_1 :

Por ser B base $E_1 = \sum_{i=1}^n \alpha_i F_i$ e por ser $E_1 \neq 0$, algún $\alpha_i \neq 0$.

Vamos a probar que podemos substituír E_1 polo F_i correspondente (é dicir, se $\alpha_3 \neq 0$, podemos substituír E_1 por F_3) de forma que $B_1 = \{F_1, \dots, F_{i-1}, E_i, F_{i+1}, \dots, F_n\}$ sigue sendo base.

Suporemos, sen perda de xeneralidade que $\alpha_1 \neq 0$, e vamos a probar que neste caso $B_1 = \{E_1, F_2, F_3, \dots, F_n\}$ é base.

- $B_1 = \{E_1, F_2, F_3, \dots, F_n\}$ é un conxunto de vectores linealmente independentes:

Pola Proposición 3.4.4, dado que estamos supoñendo que $E_1 = \sum_{i=1}^n \alpha_i F_i$ con $\alpha_1 \neq 0$,

entonces $E_1 \notin \langle \{F_2, F_3, \dots, F_n\} \rangle$ pois a expresión de E_1 como combinación lineal dos vectores da base B é única. Entonces, pola Proposición 3.3.16, $\{E_1, F_2, F_3, \dots, F_n\}$ é un conxunto de vectores linealmente independentes.

- $B_1 = \{E_1, F_2, F_3, \dots, F_n\}$ é un conxunto de xeradores de V .

Dado que $E_1 = \sum_{i=1}^n \alpha_i F_i$ con $\alpha_1 \neq 0$, existe $(\alpha_1)^{-1}$ e temos que $\alpha_1 F_1 = E_1 - \sum_{i=2}^n \alpha_i F_i$ e polo

tanto $F_1 = (\alpha_1)^{-1}(E_1 - \sum_{i=2}^n \alpha_i F_i)$. En consecuencia

$F_1 \in \langle \{E_1, F_2, F_3, \dots, F_n\} \rangle$.

Pero é obvio que $F_2, F_3, \dots, F_n \in \langle \{E_1, F_2, F_3, \dots, F_n\} \rangle$, e polo tanto $\langle \{F_1, F_2, F_3, \dots, F_n\} \rangle \subseteq \langle \{E_1, F_2, F_3, \dots, F_n\} \rangle$ e en consecuencia $\langle \{E_1, F_2, F_3, \dots, F_n\} \rangle$ é un conxunto de xeradores de \mathbf{V} .

Logo $B_1 = \{E_1, F_2, F_3, \dots, F_n\}$ é base de \mathbf{V} .

2) Supoñemos que temos substituídos $r-1$ vectores E_1, E_2, \dots, E_{r-1} de forma que

$B_{r-1} = \{E_1, E_2, \dots, E_{r-1}, F_r, \dots, F_n\}$ é base.

2) Vamos probar como podemos substituir o seguinte.

Por ser B_{r-1} base $E_r = \sum_{i=1}^{r-1} \alpha_i E_i + \sum_{i=r}^n \alpha_i F_i$ e por ser $E_r \neq 0$, algún $\alpha_i \neq 0$. Ademais ten que

existir $\alpha_i \neq 0$ con $i > r-1$, pois se non $E_r = \sum_{i=1}^{r-1} \alpha_i E_i$ e o conxunto $L = \{E_1, E_2, \dots, E_r\}$

non sería un conxunto de vectores linealmente independentes. En consecuencia temos que

B_{r-1} base e $E_r = \sum_{i=1}^{r-1} \alpha_i E_i + \sum_{i=r}^n \alpha_i F_i$ con algún $\alpha_i \neq 0, i > r$ e podemos demostrar igual que

fixemos para E_1 que podemos substituir E_r polo F_i correspondente de forma que B_r siga sendo base.

3.4.11.- Proposición.

Sexa \mathbf{V} un K -espazo vectorial. Se $B = \{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ é unha base de \mathbf{V} con n vectores, entón un conxunto $S = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ con $m > n$ non pode ser linealmente independente.

Demostración.-

Opción 1, basada no teorema der Steinitz)

Polo teorema de Steinitz, se S é un conxunto de vectores linealmente independentes, podemos sustrituir os m vectores de S por m vectores de B , e polo tanto $m \leq n$.

Opción 2, basada na resolución de sistemas de ecuacións lineais)

Imos ver que existe unha combinación lineal dos elementos de S que da 0 con algún escalar non nulo.

É dicir temos que probar que existe

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_m v_m = 0$$

con algún $x_i \neq 0, i = 1, \dots, m$.

Dado que B é unha base de V , cada vector $v_j \in S, j = 1, \dots, m$, é combinación lineal dos vectores de B .

Sexan entón:

$$v_1 = \alpha_{11}E_1 + \alpha_{12}E_2 + \dots + \alpha_{1n}E_n = \sum_{i=1}^n \alpha_{1i}E_i$$

$$v_2 = \alpha_{21}E_1 + \alpha_{22}E_2 + \dots + \alpha_{2n}E_n = \sum_{i=1}^n \alpha_{2i}E_i$$

.....

$$v_m = \alpha_{m1}E_1 + \alpha_{m2}E_2 + \dots + \alpha_{mn}E_n = \sum_{i=1}^n \alpha_{mi}E_i$$

cos escalares α_{ij} elementos fixos do corpo.

Entón unha combinación lineal

$$0 = x_1v_1 + x_2v_2 + \dots + x_mv_m$$

é o mesmo que dicir:

$$\begin{aligned} 0 &= x_1v_1 + x_2v_2 + \dots + x_mv_m = \\ &= x_1(\alpha_{11}E_1 + \alpha_{12}E_2 + \dots + \alpha_{1n}E_n) + \\ &+ x_2(\alpha_{21}E_1 + \alpha_{22}E_2 + \dots + \alpha_{2n}E_n) + \\ &\dots \\ &+ x_m(\alpha_{m1}E_1 + \alpha_{m2}E_2 + \dots + \alpha_{mn}E_n) = \\ &= (x_1\alpha_{11} + x_2\alpha_{21} + \dots + x_m\alpha_{m1})E_1 + \\ &+ (x_1\alpha_{12} + x_2\alpha_{22} + \dots + x_m\alpha_{m2})E_2 + \\ &\dots \\ &+ (x_1\alpha_{1n} + x_2\alpha_{2n} + \dots + x_m\alpha_{mn})E_n. \end{aligned}$$

Pero como $B = \{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ é unha base, os seus vectores son linealmente independentes e polo tanto isto equivale a que

$$\alpha_{11}x_1 + \alpha_{21}x_2 + \dots + \alpha_{m1}x_m = 0$$

$$\alpha_{12}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \dots + \alpha_{m2}x_m = 0$$

...

$$\alpha_{1n}x_1 + \alpha_{2n}x_2 + \dots + \alpha_{mn}x_m = 0.$$

Dado que este sistema (os α_{1n} son escalares do corpo) é un sistema homoxéneo con mais incógnitas que ecuacións, necesariamente é un Sistema Compatible Indeterminado. É dicir ten solucións distintas da trivial $(0, \dots, 0)$ tal como queríamos probar.

3.4.12.- Corolario.

Sexa \mathbf{V} un K -espazo vectorial. Se $B = \{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ é unha base de \mathbf{V} con n vectores, entón calquera outra base ten que ter necesariamente n vectores.

Demostración.-

Por ser B base $m \leq n$ xa que se $m > n$ os vectores de $B' = \{F_1, F_2, \dots, F_m\}$ non poderían ser linealmente independentes. Da mesma forma por ser B' base, $n \leq m$.

Así $m \leq n$ e $n \leq m$, de onde $m = n$.

3.4.13.- Definición.

Chámase **dimensión dun espazo vectorial** ao número de vectores dunha base (como acabamos de ver todas as bases teñen o mesmo número de vectores). Denótase $\dim(\mathbf{V})$.

3.4.14.- Corolario.

Sexa \mathbf{V} un K -espazo vectorial de dimensión n .

As seguintes afirmacións son equivalentes:

$B = \{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ é unha base de \mathbf{V} .

$B = \{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ é un conxunto de vectores de \mathbf{V} linealmente independentes.

$B = \{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ é un conxunto de xeradores de \mathbf{V} .

Demostración.

a) \Rightarrow b) e a) \Rightarrow c) son evidentes.

Imos ver que b) \Rightarrow a) e que c) \Rightarrow a)

“b) \Rightarrow a)”

Falta ver que $B = \{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ é un conxunto de xeradores.

Temos que ver que

$$v \in \langle \{E_1, E_2, \dots, E_n\} \rangle, \forall v \in \mathbf{V}.$$

Pola Proposición 3.3.16, se $v \notin \langle \{E_1, E_2, \dots, E_n\} \rangle$, entón $\{v, E_1, E_2, \dots, E_n\}$ é un conxunto linealmente independente e ten $n + 1$ elementos, en contradición coa Proposición 3.4.11.

“c) \Rightarrow a)”

Falta ver que $B = \{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ é un conxunto de vectores linealmente independentes. Se non o fora poderíamos eliminar un e seguiría sendo un conxunto de xeradores (véxase a Proposición 3.3.15). Pero entón polo Teorema 3.4.9. teríamos unha base formada por m elementos con $m < n$ en contradición con que a dimensión de V é n .

3.4.15.- Nota.

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R} = 1$$

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2 = 2$$

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = 3$$

.....

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n = n.$$

Exercicio.

Se U é un subespazo de V , entón

$$1) \dim U \leq \dim V$$

$$2) \dim U = \dim V \Leftrightarrow U = V$$

3.4.16.- Proposición.

Se V_1 e V_2 son subespazos dun espazo vectorial V , entón

$$\dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2)$$

Demostración.

Basta coller unha base de $V_1 \cap V_2$ (con r elementos) e completala a unha base B_1 de V_1 (con s elementos) e a unha base B_2 de V_2 (con t elementos). Entón $B_1 \cup B_2$ é unha base de $V_1 + V_2$ e ten $t + s - r$ elementos (pois os r elementos da base de $V_1 \cap V_2$ están incluídos entre os s elementos de B_1 e os t de B_2).

En efecto, sexan

$B = \{E_1, E_2, \dots, E_r\}$ unha base de $V_1 \cap V_2$,

$B_1 = \{E_1, E_2, \dots, E_r, E_{r+1}, E_{r+2}, \dots, E_s\}$ unha base de V_1 (completamos B) e

$B_2 = \{E_1, E_2, \dots, E_r, F_{r+1}, F_{r+2}, \dots, F_t\}$ unha base de V_2 (completamos B).

Imos probar que

$\{E_1, E_2, \dots, E_r, E_{r+1}, E_{r+2}, \dots, E_s, F_{r+1}, F_{r+2}, \dots, F_t\}$ é unha base de $V_1 + V_2$.

a) Conxunto de xeradores

$$v \in V_1 + V_2 \Rightarrow \exists v_1 \in V_1, v_2 \in V_2 / v = v_1 + v_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists v_1 = \sum_{i=1}^s \alpha_i E_i, v_2 = \sum_{i=1}^r \beta_i E_i + \sum_{i=r+1}^t \beta_i F_i, v = v_1 + v_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \sum_{i=1}^s \alpha_i E_i + \sum_{i=1}^r \beta_i E_i + \sum_{i=r+1}^t \beta_i F_i \in \langle \{E_1, E_2, \dots, E_s, F_{r+1}, \dots, F_t\} \rangle$$

b) Conxunto de vectores linealmente independentes

Supoñemos que $\sum_{i=1}^s \alpha_i E_i + \sum_{i=r+1}^t \beta_i F_i = 0$ e temos que probar que todos os escalares

$$\alpha_i = \beta_j = 0, i = 1, \dots, s, j = r+1, \dots, t.$$

En efecto

$$\sum_{i=1}^s \alpha_i E_i + \sum_{i=r+1}^t \beta_i F_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=r+1}^t \beta_i F_i = - \sum_{i=1}^s \alpha_i E_i$$

pero

$$- \sum_{i=1}^s \alpha_i E_i \in V_1 \text{ e } \sum_{i=r+1}^t \beta_i F_i \in V_2 \text{ e polo tanto } - \sum_{i=1}^s \alpha_i E_i = \sum_{i=r+1}^t \beta_i F_i \in V_1 \cap V_2.$$

Entón $\sum_{i=r+1}^t \beta_i F_i$ é combinación lineal dos vectores da base $B = \{E_1, E_2, \dots, E_r\}$ de

$V_1 \cap V_2$. Así $\sum_{i=r+1}^t \beta_i F_i = \sum_{i=1}^r \lambda_i E_i$ e polo tanto $\sum_{i=r+1}^t \beta_i F_i - \sum_{i=1}^r \lambda_i E_i = 0$ que é unha

combinación lineal dos vectores da base de V_2 que da 0 e polo tanto todos os escalares teñen que ser 0.

Así $\beta_j = 0, j = r+1, \dots, t$ (tamén $\lambda_j = 0, j = 1, \dots, r$).

Así temos que $0 = \sum_{i=r+1}^t \beta_i F_i = - \sum_{i=1}^s \alpha_i E_i$ o que nos proporciona

$\sum_{i=1}^s \alpha_i E_i = 0$ unha combinación lineal dos vectores da base de V_1 que da 0 e polo tanto

todos os escalares teñen que ser 0.

Así $\alpha_j = 0, j = 1, \dots, s$.

En consecuencia

$$\sum_{i=1}^s \alpha_i E_i + \sum_{i=r+1}^t \beta_i F_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = \beta_j = 0, i = 1, \dots, s, j = r+1, \dots, t.$$

Polo tanto $\{E_1, E_2, \dots, E_s, F_{r+1}, \dots, F_t\}$ é unha base de V e

$$\dim(V_1 + V_2) = s + t - r = \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V_1 \cap V_2)$$

3.4.17.- Definición.

Se V_1 e V_2 son subespazos dun espazo vectorial V e $V_1 \cap V_2 = \{0\}$, dicimos que $V_1 + V_2$ é a suma directa de V_1 e V_2 e denotámola por $V_1 \oplus V_2$.

Neste caso, se $V_1 \oplus V_2 = V$, dicimos que V_1 e V_2 son subespazos suplementarios (V_2 é un subespazo suplementario de V_1 en V e V_1 é un suplementario de V_2 en V).

3.4.18.- Proposición.

Se V_1 é un subespazo dun espazo vectorial V , entón existe un suplementario de V_1 en V .

Demostración.

Se $V_1 = V$ é claro que $V_2 = \{0\}$ é un suplementario de V_1 en V .

En xeral, consideramos $B_1 = \{E_1, E_2, \dots, E_r\}$ unha base de V_1 , e completamos a unha base $B = \{E_1, E_2, \dots, E_r, E_{r+1}, E_{r+2}, \dots, E_n\}$ de V

Entón $V_2 = \langle \{E_{r+1}, E_{r+2}, \dots, E_n\} \rangle$ é un suplementario de V_1 en V .

En efecto,

- É claro que $V_1 + V_2 = V$.

$$- \text{ Ademáis } v \in V_1 \cap V_2 \Rightarrow v = \sum_{i=1}^r \alpha_i E_i = \sum_{i=r+1}^n \alpha_i E_i \Rightarrow \sum_{i=1}^r \alpha_i E_i - \sum_{i=r+1}^n \alpha_i E_i = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^r \alpha_i E_i + \sum_{i=r+1}^n (-\alpha_i) E_i = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_r = -\alpha_{r+1} = -\alpha_{r+2} = \dots = -\alpha_n = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = 0.$$

3.4.19.- Proposición.

Se V_1 e V_2 son subespazos dun espazo vectorial V , entón $V_1 + V_2$ é a suma directa ($V_1 \cap V_2 = \{0\}$) \Leftrightarrow Cada vector de $V_1 + V_2$ pode expresarse de forma única como a suma dun vector de V_1 e outro de V_2 .

Demostración.

“ \Rightarrow ”

Suponemos que $V_1 \cap V_2 = \{0\}$.

Se un vector $v_1 + v_2 = u_1 + u_2$, con $v_1, u_1 \in V_1, v_2, u_2 \in V_2$, entón

$v_1 - u_1 = u_2 - v_2 \in V_1 \cap V_2 = \{0\}$ e polo tanto $v_1 - u_1 = u_2 - v_2 = 0$ e $v_1 = u_1$ e $u_2 = v_2$.

“ \Leftarrow ”

Suponemos que cada vector de $V_1 + V_2$ pode expresarse de forma única como a suma dun vector de V_1 e outro de V_2 .

Se $v \in V_1 \cap V_2$, entón $v \in V_1, v \in V_2$ e $v = v + 0 = 0 + v$ son dúas formas de expresarse v , salvo que $v = 0$

3.5. Ecuacións dun Subespazo Vectorial

Se V é un espazo vectorial sobre K de dimensión n , e U un subespazo vectorial de V xerado polos vectores u_1, \dots, u_s , linealmente independentes, existe un sistema de $n-s$ ecuacións lineais (independentes) do cal U é a solución.

Ditas ecuacións chámanse ecuacións lineais do subespazo. (Nota. O sistema non é único).

As ecuacións paramétricas de U veñen dadas por:

$$v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_s u_s.$$

As ecuacións lineais obteñense do feito de que un vector $v \in \langle \{ u_1, \dots, u_s \} \rangle$ se é un vector linealmente dependente deses vectores. Se consideramos a matriz A que ten por filas as coordenadas dos vectores u_1, \dots, u_s , entón $v \in \langle \{ u_1, \dots, u_s \} \rangle$ é equivalente a que o vector de K^n que ten por coordenadas as de v é un linealmente dependente dos vectores fila dunha matriz en escaleira equivalente por filas á matriz A .

Imos expoñer como se calculan as ecuacións lineais dun subespazo de \mathbb{R}^n , do que coñecemos un conxunto de xeradores.

3.5.1.- Exemplo 1.

Calcular as ecuacións lineais do subespazo de \mathbb{R}^4 xerado polos vectores

$$u_1 = (1, 1, 0, 0), u_2 = (1, 0, 1, 0).$$

Solución.

En \mathbb{R}^4 consideramos o subespazo vectorial U , xerado polos dous vectores u_1 e u_2 linealmente independentes.

$$U = \langle \{ u_1 = (1, 1, 0, 0), u_2 = (1, 0, 1, 0) \} \rangle,$$

$$\dim_{\mathbb{R}} U = s = 2.$$

Entón un vector $v = (x, y, z, t)$ é de U se é dependente de u_1 e u_2 e polo tanto

$$\langle \{ u_1, u_2, v \} \rangle = \langle \{ u_1, u_2 \} \rangle.$$

As ecuacións paramétricas de U veñen dadas por:

$$v = \alpha u_1 + \beta u_2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{é dicir} \quad \begin{array}{l} x = \alpha + \beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \\ t = 0 \end{array}$$

Para calcular as ecuacións lineais de U , consideramos a matriz A de filas $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$, e \mathbf{v}

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ x & y & z & t \end{pmatrix}.$$

Sen cambiar de lugar a fila 3, calculamos unha matriz de Gauss equivalente por filas á matriz A (é dicir facemos coas filas de A transformacións das indicadas en na

Proposición 3.3.20. de forma as dúas primeiras filas constitúan unha matriz de Gauss, e que teña nulos os elementos da última fila que se corresponden con columnas “con pivote”):

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2-F_1; F_3-xF_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & y-x & z & t \end{pmatrix} \xrightarrow{(-1)F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & y-x & z & t \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{F_3-(y-x)F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & z+y-x & t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

As filas de A xeran o mesmo subespazo vectorial de \mathbb{R}^4 que as filas desta matriz e as dúas primeiras filas de A xeran o mesmo subespazo vectorial que as dúas primeiras filas desta matriz.

En consecuencia para que $\langle \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}\} \rangle = \langle \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\} \rangle$ é necesario que a última fila da matriz equivalente por filas á A sexa nula.

En consecuencia $\mathbf{v} = (x, y, z)$ ten que ser solución do sistema:

$$\begin{array}{lll} z + y - x = 0 & \text{ou equivalentemente} & x - y - z = 0 \\ t = 0 & & t = 0 \end{array}$$

Se calculamos unha base das solucións deste sistema, obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / t = 0, x = y + z\} = \{(y + z, y, z, 0) / y, z \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{y(1, 1, 0, 0) + z(1, 0, 1, 0) / y, z \in \mathbb{R}\} = \langle \{(1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0)\} \rangle \end{aligned}$$

Neste caso calculamos a mesma base de partida de \mathbf{U} , o cal non ten por que suceder.

3.5.2.- Exemplo 2.

Calcular as ecuacións lineais do subespazo de \mathbb{R}^5 xerado polos vectores

$$\mathbf{u}_1 = (1, 1, 0, 0, 1), \mathbf{u}_2 = (1, 0, 1, 0, 2).$$

Solución.

En \mathbb{R}^5 consideramos o subespazo vectorial U , xerado polos dous vectores \mathbf{u}_1 e \mathbf{u}_2 linealmente independentes,

$$U = \langle \{\mathbf{u}_1 = (1, 1, 0, 0, 1), \mathbf{u}_2 = (1, 0, 1, 0, 2)\} \rangle, \dim_{\mathbb{R}} U = s = 2$$

Entón un vector $\mathbf{v} = (x, y, z, t, s)$ é de U se é linealmente dependente de \mathbf{u}_1 e \mathbf{u}_2 e polo tanto

$$\langle \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}\} \rangle = \langle \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\} \rangle$$

Para calcular as ecuacións lineais de U , consideramos a matriz A de filas \mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2 e \mathbf{v} :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ x & y & z & t & l \end{pmatrix}$$

Sen cambiar de lugar a fila 3, calculamos unha matriz equivalente por filas á matriz A e que as dúas primeiras filas sexan matriz de Gauss, e que teña nulos os elementos da última fila que se corresponden con columnas “con pivote”:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ x & y & z & t & l \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2-F_1; F_3-xF_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & y-x & z & t & l-x \end{pmatrix} \xrightarrow{(-1)F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & y-x & z & t & l-x \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-(y-x)F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & z+y-x & t & l-x+y-x \end{pmatrix}$$

As filas de A xeran o mesmo subespazo vectorial de \mathbb{R}^5 que as filas da matriz de Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & z+y-x & t & l-x+y-x \end{pmatrix}$$

e as dúas primeiras filas de A xeran o mesmo subespazo que as dúas primeiras filas desta matriz de Gauss.

En consecuencia para que $\langle \{ \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v} \} \rangle = \langle \{ \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \} \rangle$ é necesario que a última fila da matriz de Gauss sexa nula.

Polo tanto $\mathbf{v} = (x, y, z, t, s)$ ten que ser solución do sistema:

$$\begin{array}{lcl} z + y - x = 0 & \text{ou equivalentemente} & x - y - z = 0 \\ t = 0 & & t = 0 \\ 1 - 2x + y = 0 & & 2x - y - 1 = 0 \end{array}$$

3.5.3.- Exemplo 3.

Calcular as ecuacións lineais do subespazo de \mathbb{R}^7 xerado polos vectores

$$\mathbf{u}_1 = (1, 0, 1, 1, 1, 1, 0), \mathbf{u}_2 = (1, 0, 1, 1, 0, 0, 0),$$

$$\mathbf{u}_3 = (2, 0, 3, 5, 2, 2, 0), \mathbf{u}_4 = (3, 0, 2, 0, 0, 0, 0).$$

Solución.

En \mathbb{R}^7 consideramos o subespazo vectorial \mathbf{U} , xerado polos catro vectores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ e \mathbf{u}_4 , $\mathbf{U} = \langle \{ \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4 \} \rangle$.

Entón un vector $\mathbf{v} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)$ é de \mathbf{U} se é linealmente dependente de $\{ \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4 \}$ e polo tanto $\langle \{ \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4, \mathbf{v} \} \rangle = \langle \{ \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4 \} \rangle$.

Para calcular as ecuacións lineais, consideramos a matriz A de filas $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$ e \mathbf{v} :

$$\begin{array}{l} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ v \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 5 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{pmatrix}$$

Sen cambiar de lugar a fila 5, calculamos unha matriz equivalente por filas á matriz A e que as 4 primeiras filas constitúan unha matriz de Gauss, e que teña nulos os elementos da última fila que se corresponden con columnas “con pivote”:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 5 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - F_1, F_3 - 2F_1, F_4 - 3F_1, F_5 - x_1 F_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & x_2 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 & x_5 - x_1 & x_6 - x_1 & x_7 \end{pmatrix} \xrightarrow{[F_2 \leftrightarrow F_3]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & x_2 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 & x_5 - x_1 & x_6 - x_1 & x_7 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_4 + F_2, F_5 - (x_3 - x_1)F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & x_4 - x_1 - 3(x_3 - x_1) & x_5 - x_1 & x_6 - x_1 & x_7 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_4 - 3F_3, F_5 + (x_5 - x_1)F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & x_4 - x_1 - 3(x_3 - x_1) & 0 & x_6 - x_1 - (x_5 - x_1) & x_7 \end{pmatrix}$$

As filas de A xeran o mesmo subespazo vectorial de \mathbb{R}^7 que as filas desta matriz equivalente por filas,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & x_4 - x_1 - 3(x_3 - x_1) & 0 & x_6 - x_1 - (x_5 - x_1) & x_7 \end{pmatrix},$$

e as 4 primeiras filas de A xeran o mesmo subespazo que as 4 primeiras filas desta matriz.

En consecuencia para que $\langle \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4, \mathbf{v}\} \rangle = \langle \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\} \rangle$ é necesario que a última fila desta matriz equivalente por filas a A sexa nula.

En consecuencia $\mathbf{v} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)$ ten que ser solución do sistema:

$$\begin{array}{lll}
 x_2 = 0 & \text{ou equivalentemente} & x_2 = 0 \\
 x_4 - 3x_3 + 2x_1 = 0 & & 2x_1 - 3x_3 + x_4 = 0 \\
 x_6 - x_5 = 0 & & x_5 - x_6 = 0 \\
 x_7 = 0 & & x_7 = 0
 \end{array}$$

3.5.4.- Exemplo 4.

Calcular as ecuacións lineais do subespazo de \mathbb{R}^7 xerado polos vectores

$$\mathbf{u}_1 = (1, 0, 1, 1, 1, 1, 0), \mathbf{u}_2 = (0, 0, 1, 1, 0, 0, 0), \mathbf{u}_3 = (2, 0, 5, 5, 2, 2, 0)$$

Solución.

En \mathbb{R}^7 consideramos o subespazo vectorial \mathbf{U} , xerado por tres vectores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ e \mathbf{u}_3 .

$$U = \langle \{\mathbf{u}_1 = (1, 0, 1, 1, 1, 1, 0), \mathbf{u}_2 = (0, 0, 1, 1, 0, 0, 0), \mathbf{u}_3 = (2, 0, 5, 5, 2, 2, 0)\} \rangle$$

Entón un vector $\mathbf{v} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)$ é de \mathbf{U} se é linealmente dependente de $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ e polo tanto $\langle \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{v}\} \rangle = \langle \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\} \rangle$.

Para calcular as ecuacións lineais de \mathbf{U} , consideramos a matriz A de filas $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ e \mathbf{v} :

$$\begin{array}{l}
 u_1 \\
 u_2 \\
 u_3 \\
 v
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 2 & 0 & 5 & 5 & 2 & 2 & 0 \\
 x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7
 \end{pmatrix}$$

Sen cambiar de lugar a fila 4, calculamos unha matriz equivalente por filas á matriz A e que as 3 primeiras filas constitúan unha matriz de Gauss, e que teña nulos os elementos da última fila que se corresponden con columnas “con pivote”:

$$\begin{pmatrix}
 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 2 & 0 & 5 & 5 & 2 & 2 & 0 \\
 x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7
 \end{pmatrix}
 \xrightarrow{F_3 - 2F_1, F_4 - x_1 F_1}$$

$$\begin{pmatrix}
 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & x_2 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 & x_5 - x_1 & x_6 - x_1 & x_7
 \end{pmatrix}
 \xrightarrow{F_3 - 3F_2, F_4 - (x_3 - x_1)F_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & x_4 - x_1 - (x_3 - x_1) & x_5 - x_1 & x_6 - x_1 & x_7 \end{pmatrix}$$

As filas de A xeran o mesmo subespazo vectorial de \mathbb{R}^7 que as filas desta matriz equivalente por filas,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & x_4 - x_1 - (x_3 - x_1) & x_5 - x_1 & x_6 - x_1 & x_7 \end{pmatrix},$$

e as 3 primeiras filas de A xeran o mesmo subespazo que as 3 primeiras filas desta matriz.

En consecuencia para que $\langle \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{v}\} \rangle = \langle \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\} \rangle$ é necesario que a última fila desta matriz equivalente sexa nula.

En consecuencia $\mathbf{v} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)$ ten que ser solución do sistema:

$$\begin{array}{lll} x_2 = 0 & \text{ou equivalentemente} & x_2 = 0 \\ x_4 - x_3 = 0 & & x_3 - x_4 = 0 \\ x_5 - x_1 = 0 & & x_1 - x_5 = 0 \\ x_6 - x_1 = 0 & & x_1 - x_6 = 0 \\ x_7 = 0 & & x_7 = 0 \end{array}$$

3.5.5.- Exemplo 5.

Calcular as ecuacións lineais do subespazo de \mathbb{R}^8 xerado polos vectores

$$\mathbf{u}_1 = (1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1), \mathbf{u}_2 = (0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1), \mathbf{u}_3 = (0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1)$$

Solución.

En \mathbb{R}^8 consideramos o subespazo vectorial \mathbf{U} , xerado por tres vectores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ e \mathbf{u}_3 .

$$\mathbf{U} = \langle \{\mathbf{u}_1 = (1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1), \mathbf{u}_2 = (0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1), \mathbf{u}_3 = (0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1)\} \rangle$$

Entón un vector $\mathbf{v} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)$ é de \mathbf{U} se é linealmente dependente de $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ e polo tanto $\langle \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{v}\} \rangle = \langle \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\} \rangle$.

Para calcular as ecuacións lineais de \mathbf{U} , consideramos a matriz A de filas $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ e \mathbf{v} :

$$\begin{array}{l}
\mathbf{u}_1 \\
\mathbf{u}_3 \\
\mathbf{u}_2 \\
\mathbf{v}
\end{array}
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8
\end{pmatrix}
\begin{array}{c}
\longrightarrow \\
\longrightarrow \\
\longrightarrow \\
\longrightarrow
\end{array}
\begin{array}{c}
F_4 - x_1 F_1 \\
F_4 - x_2 F_2 \\
F_4 - (x_3 - x_1 - x_2) F_3
\end{array}
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & x_2 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 & x_5 - x_1 & x_6 - x_1 & x_7 & x_8 - x_1
\end{pmatrix}
\begin{array}{c}
\longrightarrow \\
\longrightarrow \\
\longrightarrow \\
\longrightarrow
\end{array}
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & x_3 - x_1 - x_2 & x_4 - x_1 & x_5 - x_1 - x_2 & x_6 - x_1 - x_2 & x_7 - x_2 & x_8 - x_1 - x_2
\end{pmatrix}
\begin{array}{c}
\longrightarrow \\
\longrightarrow \\
\longrightarrow \\
\longrightarrow
\end{array}
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & x_4 - x_1 - (x_3 - x_1 - x_2) & x_5 - x_1 - x_2 & x_6 - x_1 - x_2 & x_7 - x_2 & x_8 - x_1 - x_2 - (x_3 - x_1 - x_2)
\end{pmatrix}$$

As filas de A xeran o mesmo subespazo vectorial de \mathbb{R}^8 que as filas desta matriz equivalente por filas, e as 3 primeiras filas de A xeran o mesmo subespazo que as 3 primeiras filas desta matriz.

En consecuencia para que $\langle \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{v}\} \rangle = \langle \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\} \rangle$ é necesario que a última fila desta matriz equivalente sexa nula.

Polo tanto $\mathbf{v} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)$ ten que ser solución do sistema:

$$\begin{array}{lll}
x_4 - x_1 - (x_3 - x_1 - x_2) = 0 & \text{ou equivalentemente} & x_4 - x_3 + x_2 = 0 \\
x_5 - x_1 - x_2 = 0 & & x_5 - x_1 - x_2 = 0 \\
x_6 - x_1 - x_2 = 0 & & x_6 - x_1 - x_2 = 0 \\
x_7 - x_2 = 0 & & x_7 - x_2 = 0 \\
x_8 - x_1 - x_2 - (x_3 - x_1 - x_2) = 0 & & x_8 - x_3 = 0
\end{array}$$

Se resolvemos o sistema

$$x_4 = x_3 - x_2$$

$$x_5 = x_1 + x_2$$

$$x_6 = x_1 + x_2$$

$$x_7 = x_2$$

$$x_8 = x_3$$

$$\begin{aligned} \text{temos que } \mathbf{v} &= (x_1, x_2, x_3, x_3 - x_2, x_1 + x_2, x_1 + x_2, x_2, x_3) = \\ &= x_1 (1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0) + x_2 (0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0) + x_3 (0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1) \end{aligned}$$

Si tomamos como solución

$$x_1 = x_6 - x_2$$

$$x_4 = x_3 - x_2$$

$$x_5 = x_1 + x_2 = x_6$$

$$x_7 = x_2$$

$$x_8 = x_3$$

temos

$$\mathbf{v} = (x_6 - x_2, x_2, x_3, x_3 - x_2, x_6, x_6, x_2, x_3).$$

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \{ x_6 (1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0) + x_2 (-1, 1, 0, -1, 0, 0, 1, 0) + x_3 (0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1) / \\ & x_6, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \} = \\ &= \langle \{(1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0), (-1, 1, 0, -1, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1)\} \rangle \end{aligned}$$

Estos tres vectores non coinciden cos xeradores iniciais de \mathbf{U} . É fácil comprobar que tamén son unha base de \mathbf{U} :

$$\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 = (1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0) = \mathbf{u}_4$$

$$-\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_3 = (-1, 1, 0, -1, 0, 0, 1, 0) = \mathbf{u}_5$$

$$\mathbf{U} = \langle \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\} \rangle = \langle \{\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_4, \mathbf{u}_5\} \rangle.$$